連立漸化式の解法を 3 つ

はじめに

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ の形にする。

方法 1：連立漸化式をいじり，等比数列の形にする

手順 1

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$ ・・・②

①－$k \times$②より，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)a_n + (q-ks)b_n$

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)\left(a_n + \dfrac{q-ks}{p-kr}b_n\right)$ ・・・③

と変形する。

手順 2

③の右辺の $\dfrac{q-ks}{p-kr}$ が $\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$ となれば，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)(a_n - kb_n)$ より，

$a_n - kb_n$ は，公比 $p-kr$，初項 $a_1 - kb_1$ の等比数列だから，

$a_n - kb_n = (p-kr)^{n-1}(a_1 - kb_1)$ ・・・④

となる。

したがって，$\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$，

すなわち k についての 2 次方程式

$rk^2 - (p-s)k - q = 0$ ・・・⑤

を解き，

k が異なる 2 実数解をもつならば，

④の式が 2 つできるので，その連立方程式を解けばよい。

k が重解をもつならば，

④，①，②から a_n または b_n の漸化式を得，解けばよい。

補足 1

$p = s, q = r$ の場合は，⑤より，$k = \pm 1$ だから，これを覚えておいて，

いきなり①＋②と①－②から始めれば手際よく解ける。

補足 2

$a_{n+1} = pa_n + qb_n + t$ ・・・①’

$b_{n+1} = ra_n + sb_n + u$ ・・・②’

（t,u は実数）

の場合においても

①’－$k\times$②’より，$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)\left(a_n + \dfrac{q-ks}{p-qr} b_n\right) + t - ku$ とした後，

$\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$，すなわち k についての 2 次方程式 $rk^2 - (p-s)k - q = 0$ を解き，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)(a_n - kb_n) + t - ku$ の形の 2 項間漸化式

（$c_n = a_n - kb_n$ とおけば，$c_{n+1} = (p-kr)c_n + t - ku$ ）にしてから，

その漸化式を解けばよい。

よって，

方法 1 は万能型といえる。

方法 2：a_n と b_n について，それぞれの 3 項間漸化式をつくってから解く。

$a_{n+1}=pa_n+qb_n$　・・・①

$b_{n+1}=ra_n+sb_n$　・・・②

a_n についての漸化式

①より，$qb_n=a_{n+1}-pa_n$　$\therefore qb_{n+1}=a_{n+2}-pa_{n+1}$

②×q より，$qb_{n+1}=qra_n+sqb_n$

よって，$a_{n+2}-pa_{n+1}=qra_n+s(a_{n+1}-pa_n)$

$\therefore a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0$　・・・⑥

b_n についての漸化式

②より，$ra_n=b_{n+1}-sb_n$　$\therefore ra_{n+1}=b_{n+2}-sb_{n+1}$

①×r より，$ra_{n+1}=pra_n+qrb_n$

よって，$b_{n+2}-sb_{n+1}=p(b_{n+1}-sb_n)+qrb_n$

$\therefore b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0$　・・・⑦

漸化式⑥，⑦を解くことにより，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める。

補足 3

$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$ より，$\begin{cases} a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0 \\ b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0 \end{cases}$ は覚えておくとよい。

覚え方

$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2-(p+s)A+(ps-qr)E=O$

これより，

$a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0$

$b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0$

方法 **3**：行列を利用して解く

手順 1

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$　$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

手順 2

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1}$ を求める。

求め方の 1 例

わかりやすさの目的で $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = O$

ここで，またわかりやすさの目的で，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = (A - \alpha E)(A - \beta E)$ と表すと，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$

続いて，行列 X^{n-1} を $(X - \alpha E)(X - \beta E)$ で割った商を $Q(X)$，余りを $mX + nE$ とする。

すると，

$X^{n-1} = (X - \alpha E)(X - \beta E)Q(X) + mX + nE$

$X = \alpha E$ のとき

$\alpha^{n-1} E = m\alpha E + nE$　$\therefore m\alpha + n = \alpha^{n-1}$　・・・⑥

$X = \beta E$ のとき

$\beta^{n-1} E = m\beta E + nE$　$\therefore m\beta + n = \beta^{n-1}$　・・・⑦

⑥，⑦より，

$$m = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad n = -\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta}$$

よって，$X^{n-1} = (X - \alpha E)(X - \beta E)Q(X) + \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} X - \dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta} E$

これに $X = A$ を代入すると，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$ より，

$$A^{n-1} = \frac{\alpha^{n\backslash 1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta} E$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})}{\alpha - \beta} E \right\} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

補足 4

3 項間漸化式 $a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$ を行列で解く場合

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 以下同様

参考サイト：数学小ネタ http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukoneta.html

ケイリー・ハミルトンの定理と行列の n 乗